第十章

跨期選擇

跨期選擇

- 通常人們的所得是按時收受，如月薪
- 按時收受的所得如何分時消費 (先儲蓄後消費)?
- 或如何融資消費，即先貸款，收到薪水時再還?

現值與未來值

- 我們以簡單的財務算數開始
- 假設只有兩期; 1 與 2
- 令 r 代表單期利率

未來值

- 例如，若r = 0.1，則第1期開始時儲蓄的$100，到第二期開始時成為$110。
- 今天儲蓄$1到下一期的價值，稱之為一元的未來值。

未來值

- 給定利率 r ， $1 經過一期後的未來值為

$$FV = 1 + r.$$

- 給定利率 r ， $m 經過一期後的未來值為

$$FV = m(1 + r).$$

現值

- 設若你可以今天付錢，以換取下一期開始時的 $1 ，
- 你今天應該付出多少?
- $1?
- 當然不是。若你現在將此 $1 存起來，到了下一期開始的時候，你將有$(1+r) > $1，所以現在支付 $1 換取下期的 $1 不合算。

現值

- Q: 現在應該儲存多少錢，才能在下一期期初獲得$1?
- A: 現在儲存$m ，下期初成為$m(1+r)。要下期出有$1， m 必須符合
  m(1+r) = 1
  或 m = 1/(1+r)，
  是為下期初$1 的現值。

現值

- 下期初$1 的現值

$$PV = \frac{1}{1+r}.$$

- 而下期初$m 的現值為

$$PV = \frac{m}{1+r}.$$

現值

- 例如，若r = 0.1，為了下期初$1，你最多應該付 $PV = \frac{1}{1+0\cdot 1} = \$0\cdot 91.$
- 若r = 0.2 ，為了下期初$1，你最多應該付

$$PV = \frac{1}{1+0\cdot 2} = \$0\cdot 83.$$

跨期選擇問題

- 令 m_1 與 m_2 分別為期1 與期2 的所得
- 令 c_1 與 c_2 為期 1 與期2的消費
- 令 p_1 與 p_2為期 1 與期2的消費價格

跨期選擇問題

- 跨期選擇問題:
  給定 m_1 與 m_2 , 消費價格 p_1 與 p_2, 啥是最偏好之跨期消費組合 (c_1, c_2)?
- 要解答這個問題，我們需要知道:
  - 跨期預算限制
  - 跨期消費偏好

跨期預算限制

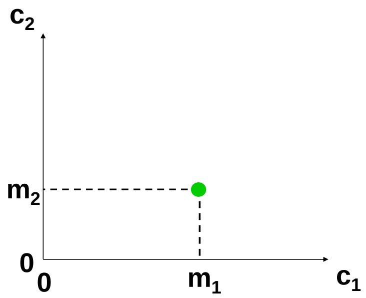
- 首先為了簡化分析，忽略價格效果，假設

$$p_1 = p_2 = \$1.$$

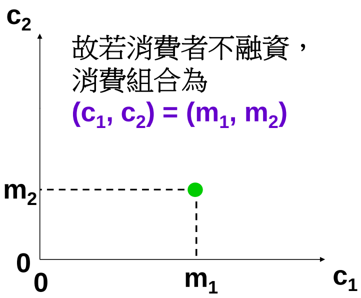
跨期預算限制

- 設若消費者不借貸
- Q: 期 1消費多少?
- A: $c_1 = m_1$.
- Q: 期 2消費多少?
- A: $c_2 = m_2$.

跨期預算限制



跨期預算限制



故若消費者不融資，
消費組合為
$(c_1, c_2) = (m_1, m_2)$

跨期預算限制

- 設若消費者第1期不消費;亦即, $c_1 = 0$ 且消費者儲蓄
  $s_1 = m_1$.
- 利率令為 r
- 如此，第2期消費多少?

跨期預算限制

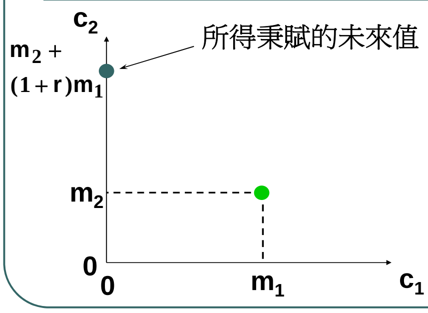
- 期 2 所得為 m_2
- 期 1儲蓄到第2期初的本利和為 $(1 + r)m_1$
- 故期2總所得為
  $m_2 + (1 + r)m_1$
- 因此期 2 消費支出為

跨期預算限制

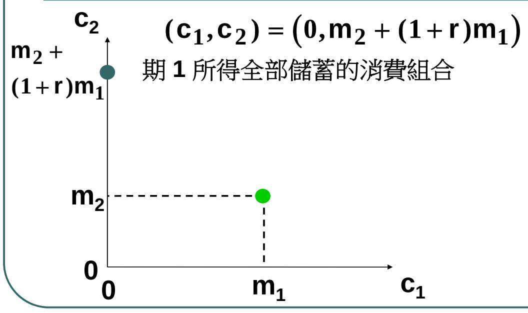
- 期 2 所得為 m_2
- 期 1儲蓄到第2期初的本利和為 $(1 + r)m_1$
- 故期2總所得為
  $m_2 + (1 + r)m_1$
- 因此期 2 消費支出為

$$c_2 = m_2 + (1 + r)m_1$$

跨期預算限制



跨期預算限制



跨期預算限制

- 設若消費者在期 1用光預算，即 $c_2 = 0$
- 用他第2 期所得$\$m_2$ ，消費者在第1期最多能借多少?
- 令 b_1 代表第1期的借款。

跨期預算限制

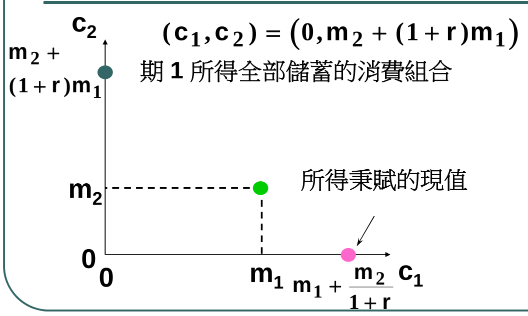
- 由於第2期有 $\$m_2$ 可用來還第1期的債 $\$b_1$
- 故　$b_1(1 + r) = m_2$.
- 亦即，　$b_1 = m_2 / (1 + r)$
- 故第1期最多能消費…

跨期預算限制

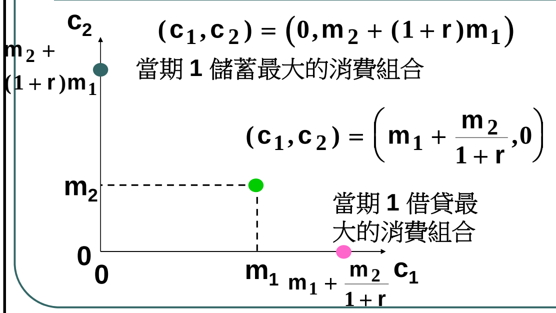
- 由於第2期有 $\$m_2$ 可用來還第1期的債 $\$b_1$
- 故　$b_1(1 + r) = m_2$.
- 亦即，　$b_1 = m_2 / (1 + r)$
- 故第1期最多能消費

$$c_1 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

跨期預算限制



跨期預算限制



跨期預算限制

- 設若第1期消費 c_1 單位。由於花了 \$$c_1$ 而剩下 m_1- c_1 儲蓄，故第2期消費成為

$$c_2=m_2+(1+r)(m_1-c_1)$$

跨期預算限制

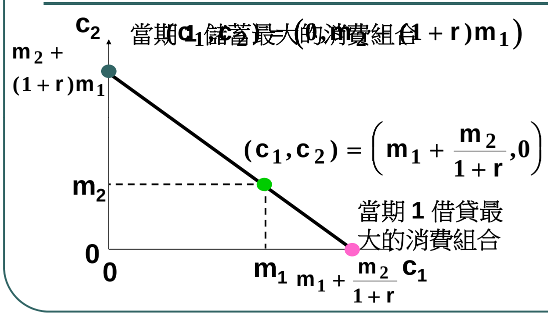
- 設若第1期消費 c_1 單位。由於花了 \$$c_1$ 而剩下 m_1- c_1 儲蓄，故第2期消費成為

$$c_2=m_2+(1+r)(m_1-c_1)$$

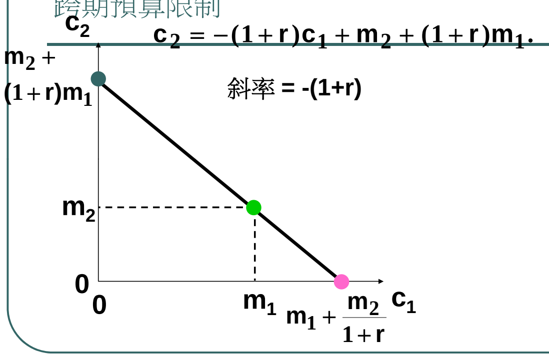
或是--

$$c_2=\underbrace{-(1+r)}_{\text{斜率}}c_1+\underbrace{m_2+(1+r)m_1}_{\text{截距}}.$$

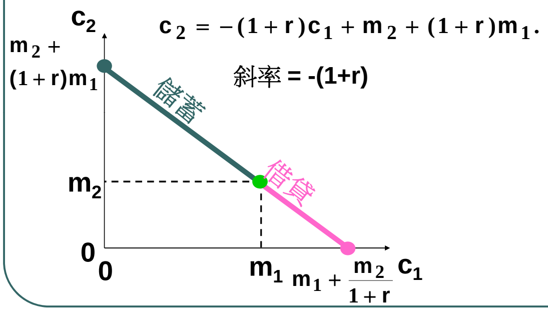
跨期預算限制



跨期預算限制



跨期預算限制



跨期預算限制

$$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$$

此為預算限制的「未來值」形式，因為所有項目都是以第2期期的價值表示。
類似地，

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

為預算限制的 「現值」形式，因為所有項目都是以第1期的價值表示。

跨期預算限制

- 考慮第1期與第2期消費的物價水平 p_1 與 p_2 .
- 預算限制會受怎樣的影響?

跨期選擇

- 給定秉賦 (m_1,m_2)與物價 p_1、p_2 ，消費者會選擇啥跨期消費組合(c_1^*,c_2^*)?
- 第 2期最多能支出 $m_2 + (1+r)m_1$
- 故第2期的消費最多為

$$c_2 = \frac{m_2 + (1+r)m_1}{p_2}.$$

跨期選擇

- 同樣地，第 1期最多能支出

$$m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

- 故第 1 期的消費最多為

$$c_1 = \frac{m_1 + m_2/(1+r)}{p_1}.$$

跨期選擇

- 最後，若第1期消費c_1 單位，則消費者在第1期花了 p_1c_1，剩下 m_1 - p_1c_1 做儲蓄。第2期的可支配所得則為

$$m_2 + (1+r)(m_1 - p_1c_1)$$

故

$$p_2c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - p_1c_1).$$

跨期選擇

$$p_2c_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - p_1c_1)$$

整理後，

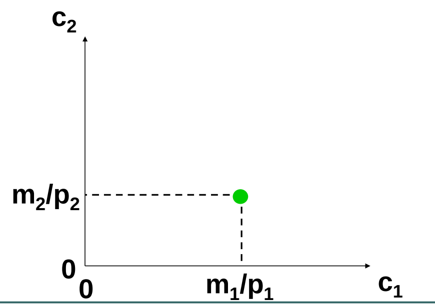
$$(1+r)p_1c_1 + p_2c_2 = (1+r)m_1 + m_2.$$

此為預算限制的「未來值」形式，因為所有項目都以第2 期的價值表示。類似的有「現值」形式

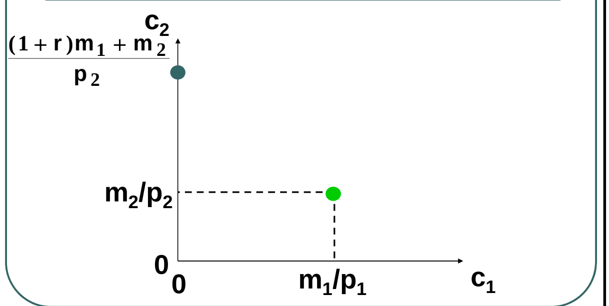
$$p_1c_1 + \frac{p_2}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

其中所有項目都以第1 期的價值表示.

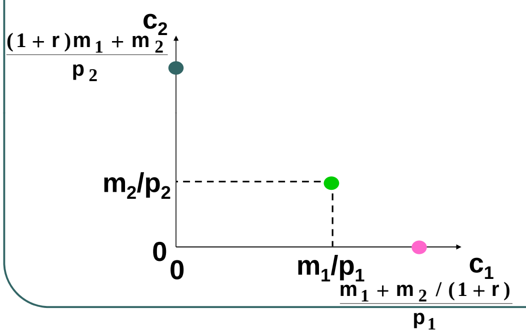
跨期預算限制



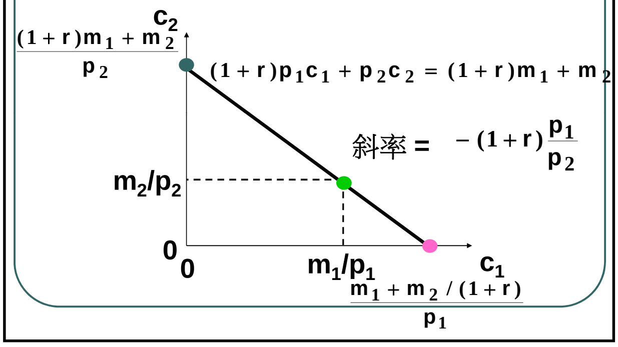
跨期預算限制



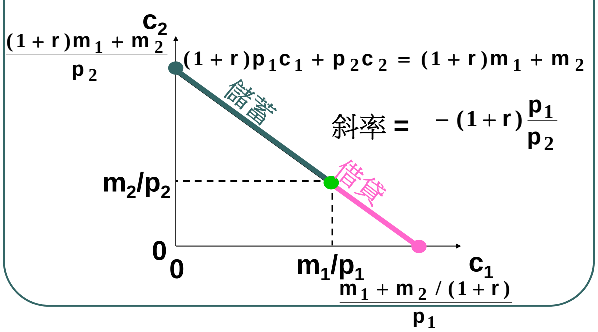
跨期預算限制



跨期預算限制



跨期預算限制



物價膨脹

- 定義膨脹率為 π ，故

$$p_1(1+\pi)=p_2.$$

- 例如，
  π = 0.2 表示 20% 膨脹，
  π = 1.0 表示 100% 膨脹

物價膨脹

- 假設 p_1=1 ，故 $p_2 = 1+\pi$.
- 改寫預算限制

$$p_1c_1 + \frac{p_2}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

為

$$c_1 + \frac{1+\pi}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

物價膨脹

$$c_1 + \frac{1+\pi}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

重新排列

$$c_2 = -\frac{1+r}{1+\pi}c_1 + \frac{1+r}{1+\pi}\left(m_1 + \frac{m_2}{1+r}\right)$$

故跨期預算限制的斜率為

$$-\frac{1+r}{1+\pi}.$$

物價膨脹

- 若無 物價膨脹 ($p_1=p_2=1$)，預算限制的斜率為 -(1+r)
- 加上物價膨脹，預算限制的斜率為 -(1+r)/(1+ π)

或寫成

$$-(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$

ρ 稱作 實質利率

實質利率

$$-(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$

算出

$$\rho = \frac{r-\pi}{1+\pi}.$$

當膨脹率甚小 ($\pi \approx 0$)，$\rho \approx r - \pi$ 。
對於較高的膨脹率，此近似值較差。

實質利率

r	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
π	0.0	0.05	0.10	0.20	1.00
r - π	0.30	0.25	0.20	0.10	-0.70
ρ	0.30	0.24	0.18	0.08	-0.35

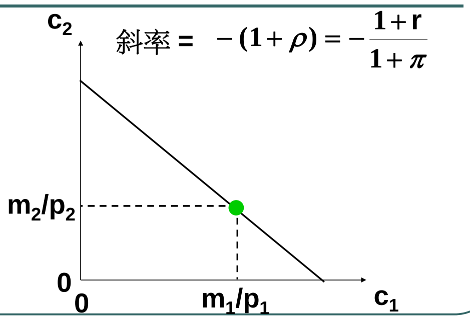
比較靜態

- 預算限制斜率為

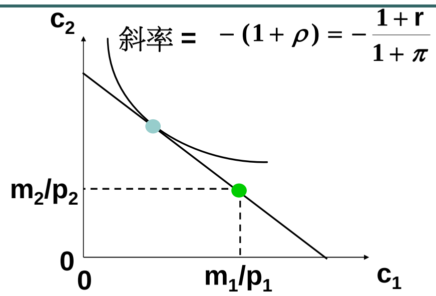
$$-(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}.$$

- 若利率 r 下跌 或膨脹率π 提高，限制式變得平坦 (都會降低實質利率)

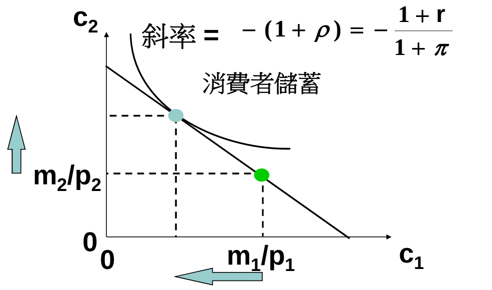
比較靜態



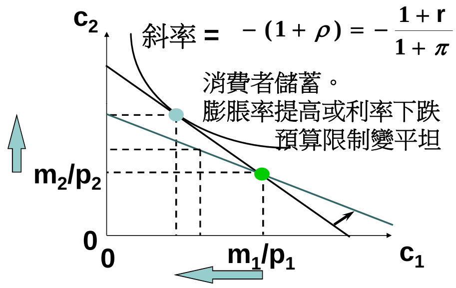
比較靜態



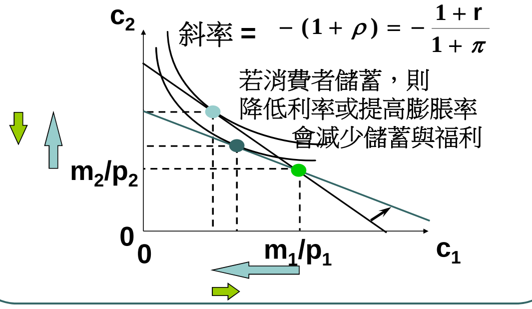
比較靜態



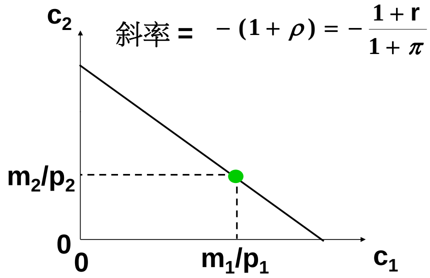
比較靜態



比較靜態

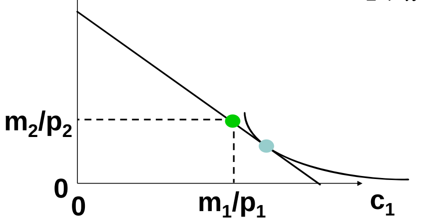


比較靜態



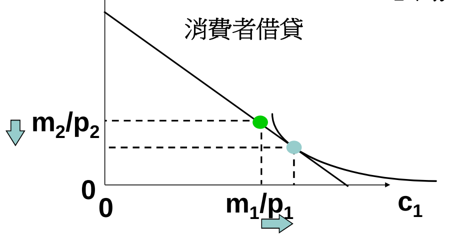
比較靜態

$$斜率 = -(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$



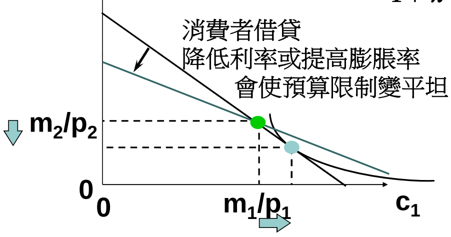
比較靜態

$$斜率 = -(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$



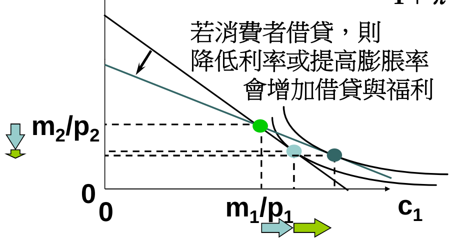
比較靜態

$$斜率 = -(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$



比較靜態

$$斜率 = -(1+\rho) = -\frac{1+r}{1+\pi}$$



證券的評價

- 金融證券為承諾支付一段所得流的金融工具
- 例如; 若某證券承諾支付
  $m_1 於第1年尾，
  $m_2 於第2年尾，與
  $m_3 於第3年尾
- 該證券現在最多值多少?

證券的評價

- 該證券同等於以下三種證券之和;
  - 第1種僅在第1年底支付$m_1
  - 第2種僅在第2年底支付$m_2
  - 第3種僅在第3年底支付$m_3

證券的評價

- 1年後支付$\$m_1$ 的PV為
  $$m_1 / (1+r)$$
- 2年後支付$\$m_2$ 的PV為
  $$m_2 / (1+r)^2$$
- 3年後支付$\$m_3$ 的PV為
  $$m_3 / (1+r)^3$$
- 故該證券的PV為
  $$m_1 / (1+r) + m_2 / (1+r)^2 + m_3 / (1+r)^3.$$

債券的評價

- 債券為一種特別的證券，定期支付固定值 $x直到到期日(maturity date) T，再償還其面值(face value)$F
- 這樣的債券現在值多少?

債券的評價

$$\frac{\$x}{1+r} \quad \frac{\$x}{(1+r)^2} \quad \frac{\$x}{(1+r)^3} \quad \frac{\$x}{(1+r)^{T-1}} \quad \frac{\$F}{(1+r)^T}$$

$$PV = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x}{(1+r)^{T-1}} + \frac{F}{(1+r)^T}.$$

債券的評價

- 設若你中了樂透券：
  獎金 $1,000,000 ，分10 年平均支付，每年 $100,000。
  該獎真正值多少?

債券的評價

$$PV = \frac{\$100,000}{1+0\cdot 1} + \frac{\$100,000}{(1+0\cdot 1)^2} + \dots + \frac{\$100,000}{(1+0\cdot 1)^{10}}$$
$$= \$614,457$$

該獎真正的價值 (現值)

終生債券的評價

- 終生債券 (consol)沒有到期日，永遠定期支付 $x
- 終生債券的現值為何?

終生債券的評價

年底	1	2	3	…	t	…
支付	$x	$x	$x	$x	$x	$x
現值	$\frac{\$x}{1+r}$	$\frac{\$x}{(1+r)^2}$	$\frac{\$x}{(1+r)^3}$	…	$\frac{\$x}{(1+r)^t}$	…

$$PV = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{x}{(1+r)^t} + \ldots.$$

終生債券的評價

$$PV = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \frac{x}{(1+r)^3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[x + \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{1+r}[x + PV].$$ 求解 PV 得到

$$PV = \frac{x}{r}.$$

終生債券的評價

例如 若利率永遠不變，為**r = 0.1**，
期付**$1,000** 的終生債券值

$$PV = \frac{x}{r} = \frac{\$1000}{0.1} = \$10,000.$$